ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки
Том 23, № 122 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-210-215
УДК 517.988.63, 512.562

О НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ С РЕФЛЕКСИВНЫМ БИНАРНЫМ ОТНОШЕНИЕМ

© **С. Бенараб, Е. С. Жуковский**

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: benarab.sarraa@gmail.com, zukovskys@mail.ru

Аннотация. Понятие упорядоченного накрывания распространяется на отображения, действующие из упорядоченного пространства X в пространство Y с рефлексивным бинарным отношением. Получено утверждение о существовании решения $x \in X$ уравнения $\Upsilon(x,x) = y$, где $y \in Y$, отображение $\Upsilon : X^2 \to Y$ по одному из аргументов является накрывающим, а по другому — антитонным. Приведен пример конкретного уравнения, удовлетворяющего предположениям доказанного утверждения, к которому не применимы известные результаты, так как Y не является упорядоченным пространством.
Ключевые слова: упорядоченное пространство; рефлексивное бинарное отношение; накрывающее отображение; антитонное отображение; разрешимость операторного уравнения

Введение

Понятие накрывания отображений, действующих в упорядоченных пространствах, определено в работах [1], [2] в связи с исследованием точек совпадения. На основе этого понятия в [3], [4] получены условия разрешимости операторных отображений в упорядоченных пространствах и эти результаты использованы для распространения теоремы Чаплыгина о неравенстве на неявные дифференциальные и интегральные уравнения. Нами в [5] было замечено, что в утверждениях о точках совпадения отображений $X \to Y$ бинарное отношение на множестве Y не обязано быть порядком. Здесь мы предлагаем аналог утверждений [3], [4] о разрешимости операторных уравнений, в котором также ослабляем требования к бинарному отношению на множестве Y: предполагается только его рефлексивность.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-41-680975, № 17-01-00553, № 16-01-00386).

1. Основные понятия

Пусть задано частично упорядоченное пространство $X = (X, \preceq_X)$. Для элементов $x', x \in X$, удовлетворяющих этому отношению, наряду с обозначением $x' \preceq_X x$ используем также обозначение $x \succeq_X x'$. Если $x' \preceq_X x$ и $x' \neq x$, пишем $x' \prec_X x$ или $x \succ_X x'$. Для элементов $u, v \in X$ определим множества

$$\mathcal{O}_X(u) \doteq \{x \in X : x \preceq_X u\}, \quad [v, u]_X \doteq \{x \in X : v \preceq x \preceq u\}.$$

Заметим, что $[v, u]_X \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $v \preceq u$.

Пусть также задано непустое множество Y, на котором определено бинарное отношение $\preceq_Y$, являющееся рефлексивным (то есть для любого $y \in Y$ выполнено $y \preceq_Y y$). Отношение $\preceq_Y$ не предполагается ни антисимметричным, ни транзитивным. В пространстве Y также пользуемся равносильными обозначениями $y' \preceq_Y y \Leftrightarrow y \succeq_Y y'$ и $y' \neq y$, $y' \preceq_Y y \Leftrightarrow y' \prec_Y y \Leftrightarrow y \succ_Y y'$.

Определение 1. Отображение $f : X \to Y$ называем *антитонным на множестве* $U \subset X$, если для любых $x_1, x_2 \in U$ таких, что $x_1 \succeq_X x_2$, выполнено

$$f(x_1) \preceq_Y f(x_2).$$

Определение 2. Отображение $f : X \to Y$ называем (*упорядоченно*) *накрывающим множество* $W \subset Y$, если

$$\forall x_0 \in X \quad \forall y \in W \quad y \preceq_Y f(x_0) \;\Rightarrow\; \exists x \in X \;\, f(x) = y \text{ и } x \preceq_X x_0.$$

Пусть заданы: отображение $\Phi : X^2 \to Y$, элементы $\tilde{y} \in Y$, $x_0 \in X$. Определим совокупность $\mathcal{S}(x_0, \Phi, \tilde{y})$ всех таких цепей $S \subset X$, что

$$\forall x \in S \quad \Phi(x, x) \succeq_Y \tilde{y}, \quad \forall x_1, x_2 \in S \quad x_2 \prec_X x_1 \Rightarrow \Phi(x_2, x_1) \preceq_Y \tilde{y}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\Phi(x, x) = \tilde{y}. \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть для некоторого элемента* $x_0 \in X$ *имеет место неравенство* $\Phi(x_0, x_0) \succeq_Y \tilde{y}$ *и выполнены следующие условия:*

(*a*) *Для любого* $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$ *отображение* $\Phi(\cdot, x) : X \to Y$ *является накрывающим множество* $W \doteq \{\tilde{y}\}$.

(*b*) *Для любого* $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$ *отображение* $\Phi(x, \cdot) : X \to Y$ *является антитонным на множестве* $[x, x_0]$.

(*c*) *Для любой цепи* $S \subset \mathcal{S}(x_0, \Phi, \tilde{y})$ *существует элемент* $u \in X$ *такой, что*

$$\forall x \in S \quad u \preceq_X x, \quad \Phi(u, u) \succeq_Y \tilde{y}.$$

Тогда существует решение $\xi \in \mathcal{O}_X(x_0)$ *уравнения* (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим множество

$$U = \{x \in O_X(x_0) : \Phi(x,x) \succeq_Y \tilde{y}\}.$$

Это множество не пусто, так как $x_0 \in U.$ Определим на U порядок $\trianglelefteq,$ полагая

$$u_2 \lhd u_1 \;\Leftrightarrow\; u_2 \prec u_1 \text{ и } \Phi(u_2,u_1) \preceq_Y \tilde{y}.$$

Покажем что отношение $\trianglelefteq$ является порядком. Свойства антисимметричности и рефлексивности очевидны. Проверим свойство транзитивности. Пусть $u_3 \lhd u_2 \lhd u_1.$ Тогда $u_3 \prec u_2 \prec u_1$ и $\Phi(u_3,u_2) \preceq_Y \tilde{y}.$ Из условия (b) следует, что $\Phi(u_3,u_1) \preceq_Y \tilde{y};$ таким образом $u_3 \lhd u_1.$

Согласно принципу максимума Хаусдорфа существует максимальная цепь (относительно порядка $\trianglelefteq$) $S \subset U,$ а в силу предположения (c) у этой цепи (уже относительно порядка $\preceq_X$) существует точная нижняя граница $\xi.$ Покажем, что ξ является решением уравнения (1). Для этого элемента выполнено

$$\Phi(\xi,\xi) \succeq_Y \tilde{y}, \quad \forall x \in S \quad \xi \preceq_X x.$$

В силу предположения (a) существует элемент $\sigma \preceq_X \xi$ такой, что $\Phi(\sigma,\xi) = \tilde{y}.$ Из этого равенства, в силу предположения (b) выполнено

$$\Phi(\sigma,\sigma) \succeq_Y \tilde{y}, \quad \forall x \in S \quad \Phi(\sigma,x) \preceq_Y \tilde{y}.$$

Полученные неравенства означают, что $\sigma \in U$ и $\sigma \trianglelefteq x$ при любом $x \in S.$ Так как цепь S максимальная, должно выполняться включение $\sigma \in S.$ Элемент ξ является нижней границей этой цепи, поэтому $\xi \succeq_X \sigma.$ В то же время, по построению, $\xi \preceq_X \sigma.$ Итак $\xi = \sigma,$ и поэтому $\Phi(\xi,\xi) = \tilde{y}.$ □

Приведем пример отображения, удовлетворяющего условиям теоремы 1, со значениями во множестве, на котором определено бинарное отношение, не являющееся порядком. В этой ситуации результаты работ [1]–[4] применять нельзя.

П р и м е р 1. Определим множество $X = \{w, x_1, u_1, x_2, u_2, \ldots\},$ на котором зададим частичный порядок, полагая для натуральных $i \leq j$ выполненными неравенства $x_i \succ_X x_j \succ_X w,$ $u_i \succ_X u_j \succ_X w,$ а элементы x_i, u_j при любых i,j полагаем несравнимыми. Далее, определим множество $Y = \{z, y_1, y_2, y_3\}$ и на нем зададим бинарное отношение

$$y_1 \succeq_Y y_2, \;\; y_2 \succeq_Y y_3, \;\; y_3 \succeq_Y y_1, \;\; z \succeq_Y z, \;\; y_i \succeq_Y y_i, \;\; y_i \succeq_Y z, \; i = 1,2,3.$$

Это отношение не обладает свойством транзитивности (так как $y_1 \succeq_Y y_2,$ $y_2 \succeq_Y y_3,$ но $y_1 \not\succeq_Y y_3$), таким образом, множество Y не является упорядоченным.

Определим отображение $\Phi : X^2 \to Y$ следующим образом. Каждому натуральному i поставим в соответствие $r(i) \in \{1,2,3\}$ так, что $i \equiv r(i) \pmod 3.$ При всех натуральных i и произвольном элементе $x \in X$ полагаем

$$\Phi(x_i,x) = y_{r(i)}, \quad \Phi(u_i,x) = y_{r(i)}, \quad \Phi(w,x) = z.$$

Для определенного такими соотношениями отображения рассмотрим уравнение (1) с любой правой частью $\tilde{y} \in Y.$ Для проверки условий теоремы 1 необходимо по элементу $\tilde{y} \in Y$ определить $x_0 \in X$ так, чтобы $\Phi(x_0, x_0) \succeq_Y \tilde{y}.$ Если $\tilde{y} \doteq y_1,$ то в качестве x_0 можно выбрать $x_3,$ так как $\Phi(x_3, x_3) = y_3 \succ y_1.$ Аналогично, для $\tilde{y} \doteq y_2,$ можно в качестве x_0 выбрать x_1; для $\tilde{y} \doteq y_3,$ следует принять x_2; а для $\tilde{y} \doteq z$ — любое $x_i.$ Далее, для уравнения (1) с определенным здесь отображением Φ легко проверяются условия теоремы 1, уравнение, очевидно, имеет решение во множестве $\mathcal{O}_X(x_0).$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. Vol. 179. № 1. P. 13-33.

2. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 5. С. 475-478.

3. *Жуковский Е.С.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1610-1627.

4. *Жуковский Е.С.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 1. С. 96-127.

5. *Бенараб С., Жуковский Е.С.* Об условиях существования точек совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. Вып. 121. С. 10-16.

Поступила в редакцию 27 марта 2018 г.
Прошла рецензирование 26 апреля 2018 г.
Принята в печать 5 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Бенараб Сарра, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: benarab.sarra@gmail.com

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики, e-mail: zukovskys@mail.ru

Для цитирования: *Бенараб С., Жуковский Е.С.* О накрывающих отображениях со значениями в пространстве с рефлексивным бинарным отношением // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 210–215. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-210-215

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-210-215

ABOUT COVERING MAPPINGS WITH VALUES IN THE SPACE WITH A REFLEXIVE BINARY RELATION

S. Benarab, E. S. Zhukovskiy

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: benarab.sarra@gmail.com, zukovskys@mail.ru

Abstract. The concept of orderly covers extend to mappings acting from an ordered space X into space Y with a reflexive binary relation. An assertion is obtained about the existence of a solution $x \in X$ of the equation $\Upsilon(x,x) = y$, where $y \in Y$, the mapping $\Upsilon : X^2 \to Y$ one by one from the arguments is a covering, and on the other — antitone. An example of a concrete an equation satisfying the assumptions of the proved assertion, to which are not applicable known results, since Y is not an ordered space.

Keywords: ordered space; reflexive binary relation;covering mapping; antitone mapping; solvability of the operator equation

REFERENCES

1. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces. *Topology and its Applications*, 2015, vol. 179, no. 1, pp. 13-33.

2. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. O tochkakh sovpadeniya otobrazheniy v chastichno uporyadochennykh prostranstvakh [On the points of coincidence of maps in partially ordered spaces]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2013, vol. 453, no. 5, pp. 475-478. (In Russian).

3. Zhukovskiy E.S. Ob uporyadochenno nakryvayushchikh otobrazheniyakh i neyavnykh differentsial'nykh neravenstvakh [On ordered-covering mappings and implicit differential inequalities]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 12, pp. 1610-1627. (In Russian).

4. Zhukovskiy E.S. Ob uporyadochenno nakryvayushchikh otobrazheniyakh i integral'nykh neravenstvakh tipa Chaplygina [About orderly covering mappings and Chaplygin's type integral inequalities]. *Algebra i analiz – St. Petersburg Mathematical Journal*, 2018, vol. 30, no. 1, pp. 96-127. (In Russian).

5. Benarab S., Zhukovskiy E.S. Ob usloviyakh sushchestvovaniya tochek sovpadeniya otobrazheniy v chastichno uporyadochennykh prostranstvakh [On the conditions of existence coincidence points for mapping in partially ordered spaces]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 121, pp. 10-16. (In Russian).

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project№ 17-41-680975, № 17-01-00553, № 16-01-00386).

Received 27 March 2018
Reviewed 26 April 2018
Accepted for press 5 June 2018
There is no conflict of interests.

Benarab Sarra, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department, e-mail: benarab.sarraa@gmail.com

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute of Mathematics, Physics and Informatics, e-mail: zukovskys@mail.ru

For citation: Benarab S., Zhukovskiy E.S. O nakryvayushchih otobrazheniyah so znacheniyami v prostranstve s refleksivnym binarnym otnosheniem [About covering mappings with values in the space with a reflexive binary relation]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 210–215. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-210-215 (In Russian, Abstr. in Engl.).